CONCOURS NATIONAL DEUG

MATHÉMATIQUES

DURÉE : 4 heures

Les deux problèmes sont indépendants. Les calculatrices sont autorisées sous réserve des conditions définies dans la circulaire n°86-228 du 28 juillet 1986 .

I. Problème I

f désigne une fonction numérique deux fois dérivable sur $\mathbf{R}$.

-1) Calculer les deux premières dérivées des fonctions :

$$\varphi(x)=\int_0^x f(t)dt \quad \text{et} \quad \psi(x)=\int_0^x (x-t)f(t)dt$$

-2) Montrer que si f vérifie l'équation :

(1) $\quad f(x)-\int_0^x f(t)dt=\sin(x)$

elle vérifie également l'équation :

(2) $\quad f'(x)-f(x)=\cos(x)$

Déterminer alors l'unique solution de **(2)** qui vérifie **(1)**.

-3) Montrer que si f vérifie l'équation :

(3) $\quad f(x)-\int_0^x (x-t)f(t)dt=\sin(x)$

elle vérifie également l'équation :

(4) $\quad f''(x)-f(x)=-\sin(x)$

Déterminer alors l'unique solution de **(4)** qui vérifie **(3)**.

-4) Dans un plan rapporté au repère orthonormé (xOy) on considère le domaine (D) caractérisé par : $0\leq x\leq 1$ et $0\leq y\leq x$. déterminer l'intégrale double :

$$I=\iint_D (x-y)\frac{Sh(y)+\sin(y)}{2}dxdy$$

II. Problème II

A. Première Partie

-1) On considère la fonction f de la variable réelle t, définie pour $t\neq 0$ par :

$$f(t)=\frac{t}{e^t-1}+\frac{t}{2}$$

a) Montrer que f peut être prolongée par continuité en 0. Pour ce qui suit on suppose que ce prolongement est réalisé et que f est définie sur tout $\mathbb{R}$.

b) Etudier et représenter graphiquement f dans un repère orthonormé.

-2) Soit $(a_n x^n)_{n\in N}$ le terme général d'une série entière réelle ($\forall n, a_n \in \mathbb{R}$) de rayon de convergence $R>0$. On désigne par $F(x)$ sa somme sur l'intervalle $]-R,R[$. On suppose que $a_0\neq 0$. Soit r un réel de l'intervalle $]0,R[$.

On considère la suite $(A_n)_{n\in N}$ définie par son premier terme :

$$A_0=\frac{1}{a_0}$$

et la relation de récurrence pour $n>0$:

$$A_n=-\frac{1}{a_0}\sum_{i=1}^{n} a_i r^i A_{n-i}$$

a) Montrer qu'il existe $M>0$ tel que pour tout n on ait : $|A_n|\leq\frac{M^n}{|a_0|^{n+1}}$.

En déduire que la série de terme général $(A_n x^n)_{n\in N}$ a un rayon de convergence non nul.

b) Montrer que la fonction $\frac{1}{F(x)}$ est bien définie au voisinage de 0 et y admet un développement en série entière, que l'on précisera.

c) Montrer que la fonction f définie à la question -1) admet au voisinage de 0 un développement en série entière de la forme :

$$f(t)=1-\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n B_n \frac{t^{2n}}{(2n)!}$$

Où les nombres B_n sont des constantes que l'on ne cherchera pas à déterminer ici.

-3) Soit x un nombre réel donné. Montrer que la fonction : g_x : $t\in\mathbf{R}\to g_x(t)=\dfrac{te^{xt}}{e^t-1}$, admet un développement en série entière au voisinage de t=0 de la forme :

$$g_x(t)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{t^n}{n!}\varphi_n(x)$$

où, pour chaque n, φ_n est un polynôme de degré n en x vérifiant :

$$\varphi_n(x)=\sum_{k=0}^{n}C_n^k\varphi_k(0)x^{n-k}$$

On a désigné par C_n^k le nombre de combinaisons de k éléments pris parmi n. On exprimera, selon les valeurs de n les $\varphi_n(0)$ en fonction des nombres $\{B_i\}$.

-4) En considérant la différence $g_1(t)-g_0(t)$, établir que l'on a pour $n\geq 2$ l'égalité :

$$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!(n-k)!}\varphi_k(0)=0$$

En déduire B_1, B_2, B_3 et expliciter les polynômes φ_0 ,φ_1 ,φ_2 ,φ_3 ,φ_4.

-5) Etablir les relations :

a) $\forall x\in\mathbb{R},\forall n\geq 1$: $\dfrac{d}{dx}\varphi_n(x)=n\varphi_{n-1}(x)$.

b) $\forall x\in\mathbb{R},\forall n\geq 1$: $\dfrac{d^m}{dx^m}\varphi_n(x)=\dfrac{n!}{(n-m)!}\varphi_{n-m}(x)$ $\quad(m\leq n)$

c) $\forall x\in\mathbb{R},\forall n\geq 1$: $\varphi_n(x+1)=\varphi_n(x)+nx^{n-1}$

d) $\forall x\in\mathbb{R},\forall n\geq 1$: $\varphi_n(1-x)=(-1)^n\varphi_n(x)$.

En déduire que le graphe de la fonction $y=\varphi_n(x)$ dans un repère orthonormé (xOy) possède une symétrie que l'on précisera.

e) Etudier succinctement sur [0,1] les variations de $y=\varphi_n(x)$ en fonction de la parité de n.

f) $\forall n\geq 1 : \int_0^1 \varphi_n(x)dx=0$

-6) On se propose d'établir la propriété suivante, pour $n\geq 0$:

(Π_n) Si $0<x<\frac{1}{2}$: $(-1)^{n+1}\varphi_{2n+1}(x)>0$

Vérifier (Π_0), (Π_1). Soit $n\geq 1$, en admettant que (Π_{n-1}) soit vraie :

a) Etablir que, si $x\in]0,1[$ alors : $(-1)^n[\varphi_{2n}(x)-\varphi_{2n}(0)]>0$, et montrer que : $(-1)^{n-1}\varphi_{2n}(0)>0$.

b) Montrer que φ_{2n+1} ne s'annule pas sur $]0,\frac{1}{2}[$. Déduire alors que (Π_n) est vraie par récurrence sur n.

-7) Montrer que pour $n\geq 1$ on a $B_n>0$ et établir la majoration : $\forall x \in]0,1[: |\varphi_{2n+1}(x)|\leq\frac{(2n+1)B_n}{2}$.

B. Seconde Partie

Soit a et b deux réels.

-1) Soit f une fonction à valeurs réelles de classe C^∞ sur $\mathbf{R}$ et P un polynôme de degré $n>0$. On note $f^{(m)}$ (respectivement $P^{(m)}$) la dérivée m-*ième* de f (respectivement de P). Etablir l'identité :

$$\frac{d}{dt}\left[\sum_{m=1}^{n}(-1)^m(b-a)^m P^{(n-m)}(t)f^{(m)}(a+(b-a)t)\right]=$$
$$-(b-a)P^{(n)}(t)f^{(1)}(a+(b-a)t)+(-1)^n(b-a)^{n+1}P(t)f^{(n+1)}(a+(b-a)t)$$

En déduire la formule :

$$P^{(n)}(0)\{f(b)-f(a)\}=$$
$$\sum_{m=1}^{n}(-1)^{m-1}(b-a)^m\left\{P^{(n-m)}(1)f^{(m)}(b)-P^{(n-m)}(0)f^{(m)}(a)\right\}$$
$$+(-1)^n(b-a)^{n+1}\int_0^1 P(t)f^{(n+1)}(a+(b-a)t)\,dt$$

-2) Soit $n>0$ un entier. Soit g une fonction à valeurs réelles de classe C^∞ sur $\mathbf{R}$.

a) En utilisant la formule précédente, établir que :

$$g(b)-g(a)=$$
$$\frac{(b-a)}{2}\left[g'(b)+g'(a)\right]+\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\frac{(b-a)^{2k}}{(2k)!}B_k\left\{g^{(2k)}(b)-g^{(2k)}(a)\right\}$$
$$+\frac{(b-a)^{2n+1}}{(2n)!}\int_0^1\varphi_{2n}(t)g^{(2n+1)}(a+(b-a)t)\,dt$$

b) On pose $h=\frac{b-a}{m}$ où m est un entier non nul. Déduire la formule d'intégration :

$$\int_a^b g(x)dx=h\left\{\frac{g(a)}{2}+g(a+h)+.....g(a+(m-1)h)+\frac{g(b)}{2}\right\}$$
$$+\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k B_k h^{2k}}{(2k)!}\left[g^{(2k-1)}(b)-g^{(2k-1)}(a)\right]+R_n$$

où R_n est un reste dont on précisera l'expression. Que représente le terme entre accolades ?

-3) Pour tout $n>0$ on définit la fonction périodique P_n, de période 1 par : $P_n(x)=\frac{\varphi_n(x)}{n!}$ si $x\in[0,1[$ et : $P_n(x+1)=P_n(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$. Montrer que le reste R_n obtenu ci-dessus se met sous la forme :

$$R_n=h^{2n+1}\int_0^m P_{2n}(t)g^{(2n)}(a+ht)\,dt=-h^{2n+2}\int_0^m P_{2n+1}(t)g^{(2n+1)}(a+ht)\,dt$$

-4) On pose : $\gamma=\lim_{m\to+\infty}\left\{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{m}-Log(m)\right\}$ (constante d'Euler) où Log désigne le logarithme Népérien.

a) Montrer que γ est bien définie. On pourra pour cela introduire la suite $u_n=\frac{1}{n}-Log(\frac{n+1}{n})$.

b) En considérant la fonction $g(x)=\frac{1}{1+x}$, montrer que :

$$1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{m}-Log(m)=\frac{1}{2}(1+\frac{1}{m})+\frac{B_1}{2}(1-\frac{1}{m^2})-\frac{B_2}{4}(1-\frac{1}{m^4})+\frac{B_3}{6}(1-\frac{1}{m^6})-7!\int_1^m\frac{P_7(t)}{t^8}dt$$

c) Indiquer comment choisir m pour obtenir une valeur approchée de γ à 10^{-6} prés. On admettra que le logarithme de m est connu de manière exacte .